

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

1.

a) Dați exemplu de o ecuație de gradul al doilea având coeficienți raționali care admite ca rădăcină numărul $x_1 = -1 + \sqrt{3}$.

b) Un agent economic a închiriat spre amenajare un spațiu comercial în care pardoseala are forma unui pătrat cu latura egală cu $2x - 3$ metri. Într-un colț, sub forma unui pătrat cu latura egală cu x metri, amenajează magazia iar restul de 24 metri pătrați îi are la dispoziție pentru expunerea mărfii. Ce suprafață a închiriat ?

Soluție:

a) Considerând $x_1 = -1 + \sqrt{3}$ și $x_2 = -1 - \sqrt{3}$ obținem $S = -2, P = -2$,

iar ecuația cerută este $x^2 - 2x - 2 = 0$ 3p

b) Spațiul închiriat are suprafața egală cu $(2x - 3)^2 (m^2)$ 1p

Enunțul se scrie astfel : $(2x - 3)^2 = x^2 + 24$ 1p

Obține ecuația de gradul al doilea : $3x^2 - 12x - 15 = 0$ 1p

Obține soluțiile $x_1 = 5; x_2 = -1$,

Finalizare : Numai $x=5$ convine iar suprafața închiriată are $49 m^2$ 1p

2. Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N în planul triunghiului astfel încât

$\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ iar $\overrightarrow{CN} = q \cdot \overrightarrow{CB}$, unde $q > 0$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{AN} = (1 - q) \cdot \overrightarrow{AC} + q \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) Să se determine q astfel încât punctele A, M, N să fie coliniare.

Soluție:

a) Aplică regula triunghiului și obține relația cerută 4p

b) Scrie condiția de coliniaritate a doi vectori și o aplica în cazul concret 2p

Finalizare $q = \frac{2}{3}$ 1p

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, pentru orice $n \geq 1$ și $b_n = \frac{3 - a_n}{a_n - 1}$,

pentru orice $n \geq 1$.

a) Determinați termenii a_2, a_3, a_4 .

b) Utilizând metoda inducției matematice arătați că $a_n = \frac{n+1}{n}$, pentru orice $n \geq 1$.

c) Arătați că șirul b_n este progresie aritmetică.

Soluție:

a) Pentru $n=1, n=2, n=3$ obține $a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4}$ 3x1p

b) Parcurge etapa verificării: $P(1) - (A)$ 1p

Demonstrează implicația $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

c) Calculează $b_n = \frac{3-a_n}{a_n-1} = \frac{3-\frac{n+1}{n}}{\frac{n+1}{n}-1} = 2n-1$ 1p

Finalizare: $b_{n+1}-b_n = 2$, deci șirul este o progresie aritmetica 1p

4. Matei și Irina sunt elevi în clasa a IX-a și studiază la școală 15 discipline obținând la sfârșitul semestrului I aceeași medie generală. Știind că au avut numai medii de opt, nouă și zece iar numărul mediilor de zece ,nouă și opt ale lui Matei este respectiv egal cu numărul mediilor de nouă, opt și zece ale Irinei, precizați câte medii de zece are Irina.?

Soluție:

Dacă notăm cu a - numărul mediilor de zece ale lui Matei
 b - numărul mediilor de noua ale lui Matei
 c - numărul mediilor de opt ale lui Matei

Atunci $a + b + c = 15$ 2p

În aceste condiții Irina va avea a - medii de noua; b - medii de opt și c - medii de zece 1p

Scrie condiția ca elevii sa aibă aceeași medie semestrială: $10a + 9b + 8c = 9a + 8b + 10c$ 2p

Obține $a + b = 2c$ 1p

Finalizare: Deduce $c = 5$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1.

a) Dacă $a = \sqrt{2x+3}, b = \sqrt[3]{4x-4}, x \in [-\frac{3}{2}, \infty)$, demonstrați că $2a^2 - b^3 = 10$.

b) Rezolvați în \mathbb{R} sistemul $\begin{cases} 2a^2 - b^3 = 10 \\ a + b = 5 \end{cases}$.

Soluție:

a) Avem $a^2 = 2x + 3, b^3 = 4x - 4$ 2p
 Finalizare 1p
 b) Obține ecuația $2(5 - b)^2 - b^3 = 10$ 2p
 adică $(b - 2) \cdot (b^2 + 20) = 0$ 1p
 Soluția sistemului $a = 3, b = 2$ 1p

2. Fie funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = 1 - \varepsilon z$, unde $\varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Verificați că $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0, \varepsilon^3 = -1$
 b) Arătați că $f(f(z)) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 z, \forall z \in \mathbb{C}$.
 c) Demonstrați că $f(f(f(z))) = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Soluție:

a) Calcul 3p
 b) Efectuează corect și folosește punctul precedent 2p
 Finalizare 1p
 c) Folosind punctul b), demonstrează identitatea 1p

3. Se consideră mulțimea $G = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid w = \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z}, \forall z \in \mathbb{C}^* \right\}$.

a) Arătați că $\forall w \in G \Rightarrow w \in \mathbb{R}$.
 b) Demonstrați că $-2 \leq \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \leq 2, (\forall) z \in \mathbb{C}^*$.

Soluție:

a) Dacă notăm $w = \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z}$, avem $\bar{w} = \frac{\bar{z}}{|z|} + \frac{|z|}{\bar{z}}$ 2p
 Deoarece $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, obținem $\bar{w} = w$ 2p
 b) Folosind $|a + b| \leq |a| + |b|$, avem $\left| \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \right| \leq \left| \frac{z}{|z|} \right| + \left| \frac{|z|}{z} \right| = 2$ 2p
 Finalizare 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

4. Se consideră funcția $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\log_2(1-x^2)}{x^2}$ și notăm

$$S_n = \frac{1}{2^2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2} f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Demonstrați că $\frac{1}{k^2} f\left(\frac{1}{k}\right) = \log_2(k+1) - 2\log_2 k + \log_2(k-1), \quad \forall k \geq 2.$

b) Să se demonstreze că $S_n = \log_2 \frac{n+1}{2n}, (\forall) n \geq 2.$

c) Arătați că $S_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (\forall) n \geq 2.$

Soluție:

a) $\frac{1}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right) = \log_2 \frac{n^2-1}{n^2}$ 1p

Folosește corect formulele de la logaritm 2p

Finalizare 1p

b) Observa ca suma ceruta este telescopica si obține rezultatul cerut 2p

c) Presupunem prin reducere la absurd , că $\log_2 \frac{n+1}{2n} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$

Obținem $\left(\frac{n+1}{n}\right)^b = 2^{a+b}$, imposibil 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_t = \frac{t}{2} \cdot A + \frac{1}{2t} \cdot B, t > 0$

- a) Calculați $A^2, B^2, A \cdot B, B \cdot A$.
 b) Verificați identitatea $M_t \cdot M_v = M_{t \cdot v}, (\forall) t, v > 0$.
 c) Arătați că pentru orice $t > 0$ matricea M_t este inversabilă.

Soluție:

- a) Pentru fiecare cerință se acorda cate un punct 4x1p
 b) Folosind informațiile de la punctul precedent, obține cerință 2p
 c) Calculează determinantul si arata ca e nenul 1p

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

- a) Determinați asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției f.
 b) Calculați $\left(f(-1) + 2 \cdot f\left(\frac{-1}{2}\right) + \dots + n \cdot f\left(\frac{-1}{n}\right) \right)$

Soluție:

- a) Pentru încercarea de a căuta asimptota orizontala 2p
 Pentru găsirea concreta a asimptotei oblice 2p
 b) Înlocuirea corecta a termenilor în suma 1p
 Observa ca avem o progresie geometrică 1p
 Finalizare 1p

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \cos x$.

- a) Să se calculeze $f(0)$ și $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
 b) Să se arate că $f(x) \geq x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
 c) Să se identifice un $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) = a - 1$ și să se calculeze limita funcției f la $+\infty$.

Soluție:

- a) Pentru fiecare cerinta corect rezolvata cate un punct 2x1p
 b) $\cos x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ 1p
 Concluzie 1p
 c) Pentru orice a corect identificat (de exemplu π) 1p
 Folosind corect punctul b, deduce ca limita ceruta este $+\infty$ 2p

4. Fie M mulțimea tuturor matricilor de tip 3x3, în care toate elementele aparțin mulțimii $\{0,1\}$ (aceste matrici se numesc coduri de lungime 9).

- a) Să se dea un exemplu de un cod A din mulțimea M care are determinantul egal cu -1.
 b) Să se determine numărul total de coduri din mulțimea M.
 c) Să se indice 2 matrice diferite A și B din M, care au proprietatea $A^2 = B^2 = I_3$.

Soluție:

- a) Orice exemplu corect, căreia îi calculează si determinantul 3p
 b) Observa ca avem un număr de funcții si obține $2^9 = 512$ 2p
 c) Fiecare exemplu verificat primește cate un punct 2x1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Filiera tehnologica : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_t = \frac{t}{2} \cdot A + \frac{1}{2t^2} \cdot B$, iar $G = \{M_t \mid t > 0\}$

a) Calculați $A^2, B^2, A \cdot B, B \cdot A$.

b) Arătați că G este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor

c) Arătați ca (G, \cdot) este grup abelian.

Soluție:

a) Pentru fiecare din cele 4 cerințe câte 0,5 p 2p

b) Efectuează calculele și folosește corect punctul anterior 2p

c) Scrierea corectă a celor 5 axiome, invocarea punctului b și verificarea celorlalte 3p

2. Se considera funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2010}$ iar $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

a) Verificați că $(1-x) \cdot f(x) = 1 - x^{2011}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcția F este strict crescătoare

c) Să se arate că $F(1) > 3$.

Soluție:

a) Pentru calcule corecte sau aplicarea formulei 3p

b) Pentru rolul derivatei 1p

Pentru demonstrarea faptului că derivata este strict pozitivă (eventual folosind pct. a)) 2p

c) Calculează integrala și arată că valoarea ei este mai mare ca 3 1p

3. Fie $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$, $n \geq 1$.

a) Calculați I_1 .

b) Arătați că $I_{2011} \leq I_{2010}$.

Soluție:

a) Pentru aplicarea integrării prin părți 2p

Finalizare 2p

b) Calculează $I_{2011} - I_{2010}$ și argumentează pozitivitatea 3p

4. Fie $G \subset \mathbb{Z}$, o mulțime finită și nevidă. Se știe că $\forall x, y \in G \Rightarrow x \cdot y \in G$

a) Să se dea un exemplu de mulțime G care verifică proprietățile de mai sus.

b) Arătați că $2 \notin G$ și că G are maxim 3 elemente.

c) Dacă în plus G nu conține pe 0, atunci (G, \cdot) este grup.

Soluție:

a) De exemplu $G = \{1, -1\}$ sau alt exemplu corect 3p

b) Dacă $2 \in G \Rightarrow 2^n \in G, \forall n \in \mathbb{N}$ 1p

Deci elementele pot fi -1, 0, 1 1p

c) Observăm că G poate fi doar exemplul dat mai sus la pct a 1p

Arată că G e grup (eventual cu tabla operației) 1p